



TITLE:

# ベナール対流における2次元ロール解の非線形発展(乱れの3次元化とカオス2)

AUTHOR(S):

水島, 二郎; 藤村, 薫

---

CITATION:

水島, 二郎 ...[et al]. ベナール対流における2次元ロール解の非線形発展(乱れの3次元化とカオス2). 数理解析研究所講究録 1990, 733: 21-32

ISSUE DATE:

1990-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/102001>

RIGHT:

ベナール対流における 2 次元ロール解の非線形発展

和歌山大学・教育 水島二郎 (Jiro Mizushima)  
日本原子力研究所 藤村 薫 (Kaoru Fujimura)

## 1. Introduction

ベナール対流はその理論的な取り扱いが比較的簡単であったため、これまでに線形安定性をはじめ、弱非線形安定性・非線形平衡解の性質が詳しく調べられてきた。さらに、有限の大きさの容器の中の対流については実験 (Gollub & Benson, 1980) やモデルを用いた数値シミュレーション (Yahata, 1982; 1984) によって対流の発生からカオス化及び乱流状態への遷移について詳しく調べられている。

流体層の空間的な広がりが多い場合についてはベナール対流の線形安定性は Pellew & Southwell(1940)、Jeffreys (1928) および Reid & Harris (1958) により調べられた。弱非線形安定性は Gor'kov (1957) や Malkus & Veronis (1958) によって調べられ、ランダウ係数が負であること、すなわち超臨界平衡状態が存在することが示され、その定常解が求められている。また、Schlüter, Lortz & Busse (1965) は弱非線形安定性の方法を用いて定常解を計算し 2 次元ロール状の対流のみが安定であることを示し、その安定条件を求めた。さらに、ロール状の対流が上下 2 枚の平板間の熱輸送を最大にすることが示された。これは Malkus & Veronis (1958) の結果とも一致している。Busse (1967) はロール解の非線形定常解を求めさらにそのロール解の 3 次元攪乱に対する線形安定性を調べた。その結果、ロール解は zigzag モードと cross-roll モードに対して不安定であり、ロール解が安定に存在するパラメータ領域は元の静止状態の不安定領域に比べてずっと小さくなることがわかった。Busse の結果は Busse & Whitehead (1971) により実験的に確かめられた。Clever & Busse (1974) と Busse & Clever (1979) はさらに詳しく定常ロール解の性質を調べ、その 3 次元攪乱に対する線形安定性を調べた。その結果、さきに挙げた zigzag と cross-roll の 2 つの不安定性以外にも Eckhaus instability, Oscillatory instability, knot instability, skewed varicose instability などがあることが明らかになった。そして、2 次元ロール解が安定に存在するパラメータ領域が詳しく調べられた。そのパラメータ領域はブッセのバルーンと呼ばれている。

最近、Nagata & Busse (1983) と Mizushima & Saito (1988) は鉛直流体層における自然対流の非線形安定性を調べ、線形不安定の結果生じる 2 次対流の非線形平衡解が存在するパラメータ領域と自然対流が線形不安定であるパラメータ領域が異なることを見いだした。

すなわち、従来のランダウ方程式を出発点とする弱非線形安定性理論に従えば線形不安定であるパラメータ領域においては攪乱はその振幅がどこまでも大きくなるかあるいは平衡振幅を持ついずれかであることが予想されるにも関わらず攪乱の振幅がゼロに減衰することを見いだした。この一見矛盾する現象は Fujimura & Mizushima (1987) により基本波と基本波の 2 倍の波数を持つ高調波との非線形共鳴で説明されることがあることが明らかになった。同様の現象は異なる回転速度で回転する同軸 2 円筒間の流体中に発生する流れ (テイラー流) においても、生じることが報告されている (Li, 1986)。ベナール対流においてもこのような非線形共鳴が生じているのではないだろうか。こうした疑問がこの論文の出発点である。実際、Nagata & Busse (1983) は彼らの論文の中で Clever & Busse (1974) が線形不安定なパラメータ領域中の一部において平衡解を求めることができなかったことを述べている。しかし、ベナール対流においては攪乱に対する解の対称性から、鉛直流体層中

の自然対流の場合とは異なり、基本波と基本波の2倍の波数を持つ第一高調波との非線形共鳴ではなく基本波の3倍の波数を持つ第2高調波との非線形共鳴が予想されている。その結果、Busseらのこれまでに得た結果を修正する必要性が生じる可能性がある。

この論文ではまずロール状の攪乱の非線形平衡解を求め実際に非線形平衡解が存在するパラメータと元の静止状態がロール状攪乱に対して線形不安定であるパラメータ領域が異なっていることを示し、次にこの現象が基本波と第2高調波との非線形相互作用で説明されることを示す。

## 2. 基礎方程式と線形安定性

温度の異なる2枚の水平平板間に流体が満たされているとし、座標系は鉛直方向に  $z_*$  軸をとり、それに直角に  $x_*$  軸と  $y_*$  軸をとる。次元を持つ変数にアスタリスク\*を付けることにすると、流体が静止した熱伝導状態は次の式で表される。

$$U_* = 0, \quad \Theta_* = \theta_0 - \beta z_*,$$

$$P_* = p_0 - g\rho_0(z_* + \frac{1}{2}\gamma\beta z_*^2), \quad \text{for } -\frac{d}{2} \leq z_* \leq \frac{d}{2}, \quad (1)$$

ここで、 $\theta_0$  は流体層の中央における温度であり、 $\rho_0$  はそこでの流体の密度である。 $\beta$  は静止状態における流体層中の温度勾配で、 $\beta = \delta\theta/d$  で表される。 $\delta\theta$  は上下2枚の固体壁の温度差であり、 $d$  は平板間の間隔である。また、 $\gamma$  は流体の熱膨張係数であり、 $g$  は重力加速度を表す。浮力項を除いては流体の物質的性質は一定であるとするブシネスク近似を用いると、流体の速度  $\mathbf{u}$  と流体が静止した熱伝導状態からの温度の変化  $\theta$  を支配する方程式は次のように書くことができる。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \Gamma + PR\theta\lambda + P\Delta \mathbf{u}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \lambda \cdot \mathbf{u} + \Delta \theta, \quad (4)$$

ここで、すべての物理量は代表的な長さとして流体層の厚さ  $d$ 、代表的な時間として  $d^2/\kappa$ 、代表的な温度として上下2枚の平板間の温度差  $\delta\theta$  を用いて無次元化されている。 $\lambda$  は  $z$  方向の単位ベクトルを表す。(3)式において勾配の形でかける項はすべて  $\nabla \Gamma$  の項に含まれている。また、 $R$  はレイリー数、 $P$  はプラントル数であり、次式で定義される。

$$R = \frac{\gamma g \delta \theta d^3}{\nu \kappa}, \quad P = \frac{\nu}{\kappa}, \quad (5)$$

ここで、 $\kappa$  は流体の熱拡散係数、 $\nu$  は動粘性係数を表す。上下2枚の固体壁における速度  $\mathbf{u}$  と温度  $\theta$  に対する境界条件は次のように書ける。

$$\mathbf{u} = \theta = 0 \quad \text{at } z = \pm 1/2, \quad (6)$$

ベナール対流の線形安定性は Pellew & Southwell (1940), Jeffreys (1928) や Reid & Harris (1958) により詳しく調べられた。その結果次のようなことがわかっている。この

問題では安定性の交代の原理 (principle of exchange of stability) が成り立ち、もし増幅する攪乱があるとすればその攪乱の波としての位相速度はゼロである。最も不安定である攪乱は中点を中心として鉛直方向に対称な空間構造を持っている。図1に線形中立安定曲線を示す。図1において黒丸を結んだ曲線が中立安定曲線であり、その左側の曲線はのちの議論で用いるために中立安定曲線の波数を  $1/3$  に縮めて描いたものである。攪乱の線形臨界レイリー数  $R_c$  は 1707.762 であり、そのときの水平方向の臨界波数  $a_c$  は 3.1163236 である。

線形安定性理論の範囲内では増幅する攪乱の平面形については何もわからないが、仮に2次元ロール形の攪乱を考えると臨界波長は  $2\pi/a_c = 2.016$  となり、およそ流体層の厚さの2倍の周期を持つロール状の2次対流が発生することになる。

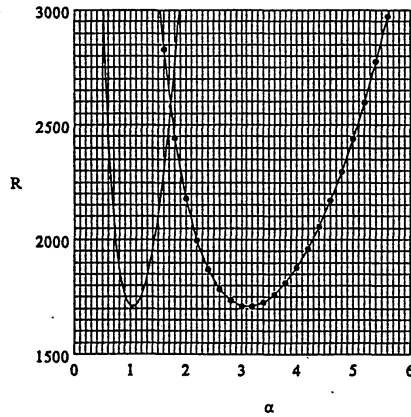


図1. 線形中立安定曲線。プラントル数には依存しない。左側の曲線はのちの議論で用いるために中立安定曲線の波数を  $1/3$  に縮めて描いたものである。

### 3. ロール状攪乱の非線形平衡解

この節では、2次元ロール状攪乱の非線形平衡解を詳しく調べる。 $(x, z)$  平面での流れ関数  $\psi$  を導入すると、(1), (2), (3) 式は次のように書くことができる。

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} - P \Delta^2 \psi + PR \frac{\partial \theta}{\partial x} = J(\psi, \Delta \psi), \quad (7)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} - \Delta \theta = J(\psi, \theta), \quad (8)$$

ここで、 $J(f, g)$  は次式で定義されるヤコビアンであり、

$$J(f, g) \equiv \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, z)},$$

$\Delta$  は次式で定義される  $(x, z)$ -平面における2次元ラプラシアンである。

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

$\psi$  と  $\theta$  に対する境界条件は次のように書くことができる。

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} = \theta = 0 \quad \text{at } z = \pm 1/2. \quad (9)$$

$\psi$  と  $\theta$  を次のように  $x$  方向にフーリエ展開する。

$$\psi = \sum_{n=-N}^N \phi_n e^{in\alpha x}, \quad (10)$$

$$\theta = \sum_{n=-N}^N \theta_n e^{in\alpha x}, \quad (11)$$

ただし、上式では展開を  $n = -N$  から  $N$  までで打ち切った。 $\phi_n$  は純虚数であり、 $\phi_{-n} = -\phi_n$  の関係があり、 $\theta_n$  は実数で、 $\theta_{-n} = \theta_n$  の関係がある。フーリエ係数  $\phi_n$  と  $\theta_n$  に対する方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial S_n \phi_n}{\partial t} - P S_n^2 \phi_n + in\alpha P R \theta_n = N_{1n},$$

$$N_{1n} = \sum_{p+q=n} i\alpha [p\phi_p S_q D\phi_q - qD\phi_p S_q \phi_q], \quad (12)$$

$$\frac{\partial \theta_n}{\partial t} + in\alpha \phi_n - S_n \theta_n = N_{2n},$$

$$N_{2n} = \sum_{p+q=n} i\alpha [p\phi_p D\theta_q - qD\phi_p \theta_q]. \quad (13)$$

ここでは、平衡解を求めるため上式で  $\partial/\partial t = 0$  とおく。ところで、線形安定性の結果最も不安定な攪乱は  $z$  方向に対称な攪乱であった。従って、基本モードとして  $z$  方向に対称な攪乱を取ることにする。 $z$  方向の対称性を考慮すれば直接に相互作用をするのは基本波数の奇数倍の波数を持つ  $z$  方向に対称な攪乱と偶数倍の波数を持つ反対称な攪乱である。現実のベナール対流においてはこのような相互作用も重要な効果を及ぼしているが、ここでは、ブッセらの結果と比較をする必要性もあり、対称性を考慮して基本波数の奇数倍の波数を持つ攪乱は  $z$  方向に対称であり、偶数倍の波数を持つ攪乱は反対称であると仮定する。この仮定のもとに  $\phi_n$  および  $\theta_n$  をチェビシエフ多項式で展開する。すなわち、奇数の  $n$  を持つ  $\phi_n, \theta_n$  に対しては次の展開を行う。

$$\phi_n = i \sum_{m=0}^{M/2+1} a_{nm} (1 - (2z)^2)^2 T_{2m}(z), \quad \theta_n = \sum_{m=0}^{M/2+1} b_{nm} (1 - (2z)^2) T_{2m}(z), \quad (14)$$

また、偶数の  $n$  を持つ  $\phi_n, \theta_n$  に対しては次のように展開する。

$$\phi_n = i \sum_{m=0}^{M/2+1} a_{nm} (1 - (2z)^2)^2 T_{2m+1}(z), \quad \theta_n = \sum_{m=0}^{M/2+1} b_{nm} (1 - (2z)^2) T_{2m+1}(z). \quad (15)$$

ここで、 $T_n(x)$  は  $n$  次のチェビシエフ多項式である。これらの展開式を (7), (8) 式に代入し、 $\partial/\partial t = 0$  とおいて得られる  $2(n+1)(m+2)$  個の実係数  $a_{nm}$  と  $b_{nm}$  に対する代数方程式をコロケーション法を用いたニュートン・ラフソンの方法で解いた。

ここで得られた、非線形平衡解の結果を示す前に、今回の計算結果と Clever & Busse (1974) の結果との比較を行っておこう。表1にプラントル数  $P = 7.0$  (水) の場合の臨界波数  $\alpha_c = 3.117$  (正確には  $\alpha_c = 3.1163236$  であるが、Clever & Busse との比較のため、ここでは臨界波数としてこの値を用いる) におけるヌッセルト数に対する両者の結果を示す。展開の打ち切り項数は  $N = 12, M = 30$  と採った。

R	Nu(Clever & Busse)	Nu(Present Result)
2000	1.214	1.21292
2500	1.478	1.47502
3000	1.667	1.66250
5000	2.112	2.10299
10000	2.618	2.60790
20000	3.119	3.10686
30000	3.440	3.42016
50000	3.894	3.85185

表1. 今回の計算結果と Clever & Busse (1974) の結果とのヌッセルト数の比較.  $\alpha_c = 3.117$ .  $P = 7.0$ .

今回の計算結果の方がより正確であることを除けば、両者の結果はほぼ同じである。Clever & Busse に比べて今回の結果の方がより正確であるのはおもに展開の打ち切り項数  $N$  および  $M$  が今回の計算の方が大きいことに依っている。

$P = 7.0$  の場合の非線形平衡解の  $z = 0$  での振幅  $w_1 \equiv i\alpha\phi_1$  の分布を図2に示す。図2からわかるように平衡振幅は  $R = 2000.0$  に対しては1本の曲線から成り立っているが、 $R = 3000.0$  及びそれ以上のレイリー数に対しては2本の曲線から成り立っていることがわかる。線形安定性理論から容易に推測できるのは  $R = 2000.0$  の曲線のように1本の曲線から成り立っている場合だけである。

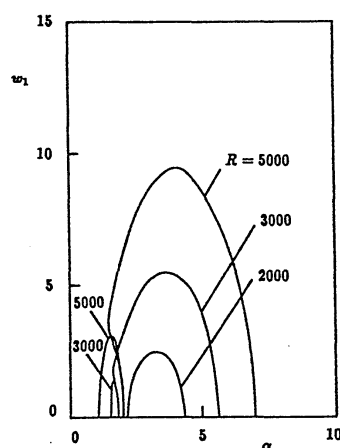


図2. 非線形平衡解の  $z = 0$  での振幅  $w_1 \equiv i\alpha\phi_1$  の分布.  $P = 7.0$ .

2本の曲線が集まっている付近の様子を詳しく見るために  $1.5 \leq \alpha \leq 1.8$  の部分を拡大した図を図3に示す。図3は  $R = 3000.0$  での平衡振幅のみを描いてある。図3から、たとえば  $\alpha = 1.7$  付近では平衡解が3つ存在していることがわかる。いままで、ベナール対流の非線形平衡解に関して数多くの研究がなされてきたが、平衡解のこのような性質については見過ごされてきた。すなわち、平衡解については十分に調べられないまま、線形安

定領域には常に平衡解があるとして、その平衡解の3次元攪乱に対する安定性が議論されてきた。ここでの計算結果からでは求められた平衡解が安定な平衡解であるのかまたは不安定な平衡解であるのかは不明である。しかし、次節で述べる弱非線形安定性理論より、ここで得られた平衡解が安定であるか不安定であるかが調べられる。結論を先取りすれば、図3の右側の曲線の上側分枝は安定であり、それ以外はすべて不安定であることがわかる。

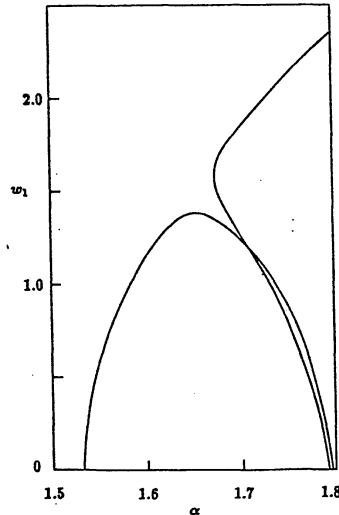


図3. 非線形平衡解の  $z=0$  での振幅  $w_1 \equiv i\alpha\phi_1$  の分布.  $P=7.0$ .  $R=3000.0$ .

平衡解が安定であるパラメータ領域を図4に示す。ここでは  $\alpha = 1.8$  付近の微細な構造は無視している。図4において、領域Ⅰはただ1つ平衡解が存在する領域であり、線形安定性から容易に想像する平衡解の分布である。領域Ⅱは平衡解が1つも存在しない領域であり、線形安定性理論からは容易に想像できない性質である。実は、Clever & Busse (1974) 及び Busse & Clever (1979) が平衡解を求めるのに失敗した領域はこの領域である。

領域Ⅲはただ1つの安定な平衡解と不安定な平衡解が2つ存在する領域であり、注意深く調べないと領域Ⅰと判別が難しい領域である。

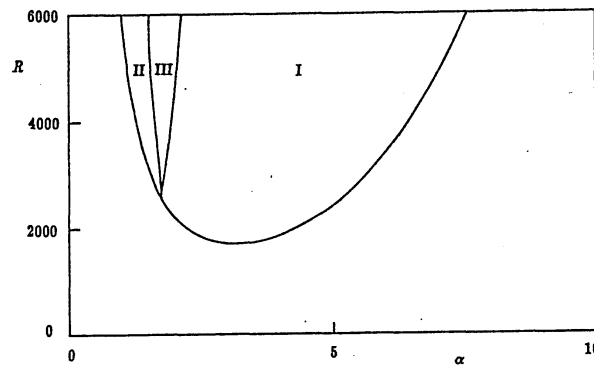


図4. 平衡解が存在するパラメータ領域.  $P=7.0$ . 領域Ⅰではただ1つ平衡解が存在する。領域Ⅱでは平衡解が1つも存在しない。領域Ⅲではただ1つの安定な平衡解と不安定な平衡解が2つ存在する。

#### 4. 弱非線形安定性理論

前節ではロール状攪乱の非線形平衡解を直接に求めた。その結果線形安定性理論からは容易に推測できない結果を得た。この結果はモード間の非線形共鳴で説明できることを

この節で示す。

振幅展開法を用いた通常の弱非線形安定性理論に従えば波数 $\alpha$ を持つ単一の基本モードの複素振幅 $A_1$ に対する振幅方程式が次のように得られる。

$$\frac{dA_1}{dt} = \lambda_1 A_1 + \lambda_{-111} |A_1|^2 A_1. \quad (16)$$

この振幅方程式に従えば、増幅攪乱 $\lambda_1 > 0$ はランダウ係数 $\lambda_{-111}$ が負のときは平衡振幅 $|A_1|_{eq} = (-\lambda_1/\lambda_{-111})^{1/2}$ を持つ。低レイリー数では $\alpha_c = 3.1163236$ に対してはのちに述べる第2高調波との共鳴の影響はなく(15)式が成り立ち、プラントル数 $P = 7.0$ において平衡振幅 $w_1 \equiv |A_1|_{eq}/\alpha$ を計算すると、表2のようになる。

R	$w_1$ (Weakly Nonlinear)	$w_1$ (Fourier Truncation)
1710	0.214244	0.214122
1720	0.502383	0.500831
1750	0.941117	0.931211
1800	1.40973	1.37800
1900	2.08888	1.99476
2000	2.63995	2.46596
2200	3.58719	3.21677
2400	4.43589	3.83331
2600	5.23353	4.37230
2800	5.99985	4.85923
3000	6.74491	5.30812

表2. 平衡振幅 $w_1$ に対する弱非線形安定性理論の方法とフーリエ打ち切りの方法による結果の比較.  $\alpha_c = 3.1163236$ .  $P = 7.0$ .

表2では比較のため前節で説明したフーリエ打ち切りの方法による結果も同時に示した。(15)式から計算した値は臨界レイリー数付近ではほぼ正しいがレイリー数が大きくなるに従ってフーリエ打ち切りによる正確な値からずれていく(図5参照)。

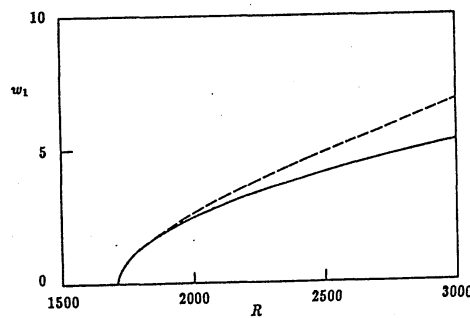


図5. 非線形平衡解の $x=0$ での振幅 $w_1 \equiv i\alpha\phi_1$ と弱非線形安定性理論から求めた $w_1$ の比較.  $P = 7.0$ .  $\alpha = 3.1163236$ .

(15)式に従う限り、線形不安定な攪乱が振幅ゼロまで減衰することは考えることは不可能である。攪乱の振幅が小さくなると非線形項が無視でき、線形安定特性により攪乱は成長することが予想される。



鉛直流体層での自然対流の非線形発展過程においては基本波とその高調波との非線形共鳴により、同様な現象が現れた (Fujimura & Mizushima, 1987)。ベナール対流のロール解は  $z$  方向に対称性があるため、基本波と3倍の波数を持つ第2高調波との非線形共鳴が起こることが予想される。基本波と第2高調波との非線形共鳴を考慮に入れると振幅方程式は次のようになる。

$$\frac{dA_1}{dt} = \lambda_1 A_1 + \lambda_{-111} |A_1|^2 A_1 + \lambda_{-331} |A_3|^2 A_1 + \lambda_{-1-13} A_1^{*2} A_3, \quad (17)$$

$$\frac{dA_3}{dt} = \lambda_3 A_3 + \lambda_{-113} |A_1|^2 A_3 + \lambda_{-333} |A_3|^2 A_3 + \lambda_{111} A_1^3, \quad (18)$$

ここで、 $A_1$  及び  $A_3$  はそれぞれ基本波及び第2高調波に対する複素振幅である。また、すべての係数  $\lambda$  は実数である。(17), (18) に基づいて1対3共鳴の平衡解を分類するためにまず、

$$A_n(t) = a_n(t) e^{i\vartheta_n(t)}, \quad (n = 1, 3) \quad \Theta = \vartheta_3 - 3\vartheta_1$$

とおくと、4自由度系の方程式である(17)と(18)は

$$\frac{da_1}{dt} = c_1 a_1 + c_2 a_1^3 + c_3 a_1 a_2^2 + c_4 a_1^2 a_2 \cos \Theta, \quad (19)$$

$$\frac{da_3}{dt} = d_1 a_3 + d_2 a_1^2 a_3 + d_3 a_3^3 + d_4 a_1^3 \cos \Theta, \quad (20)$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = -(d_4 a_1^3 a_3^{-1} + 3c_4 a_1 a_3) \sin \Theta, \quad (21)$$

のように3自由度系の方程式に帰着される。この式の定常解を求めることは容易であり、結局可能な解として以下の3通りの解が得られる。

### (1) 単一モード解 (P)

$$a_1 = 0, \quad a_3^2 = -d_1/d_3$$

この解は  $c_1 + c_3 d_1/d_3 < 0$  であれば安定に保たれる。

### (2) 混合モード解 (M)

$$a_1 = r a_3, \quad a_3^2 = -d_1/(d_2 r^2 + d_3 + d_4 \cos \Theta r^3)$$

$$\Theta = n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ただし、 $r$ は

$$d_4 \cos \Theta c_1 r^3 + (c_1 d_2 - c_2 d_1) r^2 - d_1 c_4 \cos \Theta r + (c_1 d_3 - c_3 d_1) = 0$$

の根である。

### (3) 伝播波モード解 (T)

$$a_1^2 = -3c_4 d_4^{-1} a_3^2,$$

$$a_3^2 = \frac{3c_1 + d_1}{9c_2c_4d_4^{-1} - 3c_3 + 3c_4d_2d_4^{-1} - d_3},$$

$$\cos \Theta = -\frac{c_1a_1 + c_2a_1^3 + c_3a_1a_3^2}{c_4a_1^2a_3}.$$

方程式 (17) と (18) の係数を実際に計算し、平衡解を求めた。図 6 に  $P = 7.0$ 、 $R = 3000.0$  における平衡振幅  $w_1$  の分布を示す。フーリエ打ち切りの方法から計算した結果図 3 と比較すると定性的にはもちろんのこと、定量的にもよく一致していることがわかる。

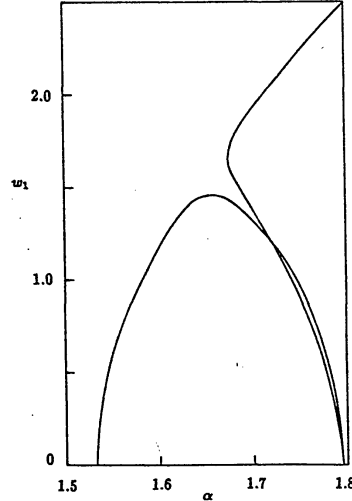


図 6. 弱非線形安定性理論から求めた  $w_1$  の分布.  $P = 7.0$ ,  $R = 3000$ .

図 7-1 2 に  $P = 10^{-4}, 0.05, 0.1, 0.12, 0.7$  および  $10^3$  の場合の  $R = 3000$  における分岐曲線を示す。ただし、通常分岐曲線のように横軸に分岐パラメータ  $R$  を用いる代わりに波数  $\alpha$  が採っている。これらの図に書き込まれている文字  $P$ ,  $M$ ,  $T$  はそれぞれ単一モード解、混合モード解、伝播波モード解を表す。括弧で囲まれていないモードは安定なモードを、 $[\ ]$  で囲まれたモードは不安定なモードを意味し、 $\{ \}$  で囲まれたモードは不安定な伝播波でホップ分岐を経て安定な変調された波に移行するモードを意味する。 $P < 10^{-3}$  および  $P > 10^2$  で分岐曲線は漸近形を持つ。 $P < 10^{-3}$  では絶対値としては  $P = 10^{-4}$  の結果に  $10^4 P$  を掛けたものに漸近し、 $P > 10^2$  では  $P = 10^3$  の結果に漸近する。それぞれの安定特性は  $P = 10^{-4}$  および  $10^4 P$  のときの安定特性と一致する。安定特性を考えなければ、 $P \leq 0.12$  では伝播波モードが存在するが、 $P \geq 0.13$  では存在しないことがわかった。

波数  $\alpha$  が共鳴波数  $\alpha = \alpha_r (\equiv 1.7232445)$  から大きくずれると、第 2 高調波は亜臨界となり基本波を中心とした力学系に従属的にしか影響できなくなる。そのような場合の攪乱の振舞いは単一モードに対するランダウ方程式 (16) によって支配される。 $\alpha \downarrow \alpha_r$  のとき、(16) で記述される解から (17), (18) で記述される解へ滑らかに移行することが予想されるが、その様子を見るために図 7、10、11 および 12 では (16) で計算される平衡振幅が一点鎖線で表されている。 $P > 0.7$  の場合には (16) の解が (17), (18) の解に滑らかに移行するが、 $P > 0.7$  の場合には (16) の解が (17), (18) の解に滑らかに接続されておらず、滑らかにつながるためにはより高次の非線形相互作用を考慮に入れなければならないと推測できる。

ここまでは攪乱の  $z$  方向の対称性を考慮に入れて議論を行ってきた。対称性を考慮に入れない、一般的な場合には基本波と 2 倍の波数を持つ第 1 高調波および 3 倍の波数を持つ第 2 高調波の 3 つの波が相互作用を行う。このとき、これら 3 つの波の振幅を支配する方程式は次のようになる。

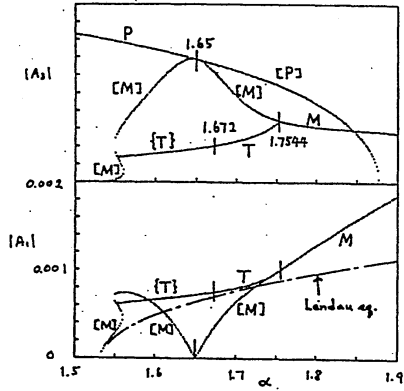


図7. 分岐曲線。P, M, Tはそれぞれ単一モード解、混合モード解、伝播波モード解を表す。括弧で囲まれていないモードは安定なモードを、[]で囲まれたモードは不安定なモードを意味し、{}で囲まれたモードは不安定な伝播波でキャップ分岐を経て安定な変調された波に移行するモードを意味する。  $P = 10^{-4}$ ,  $R = 3000$ .

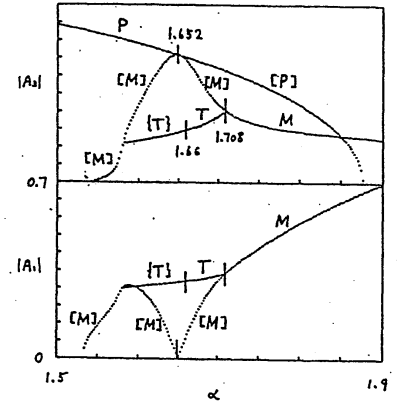


図8. 分岐曲線。  $P = 0.05$ ,  $R = 3000$ .

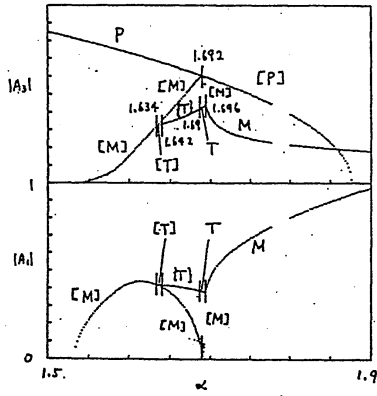


図9. 分岐曲線。  $P = 0.1$ ,  $R = 3000$ .

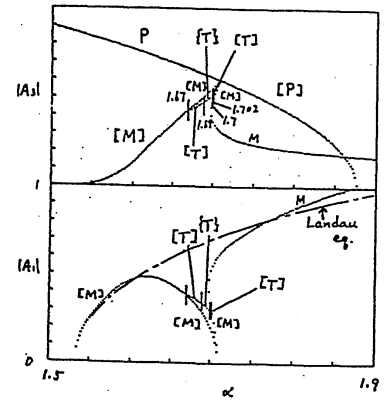


図10. 分岐曲線。  $P = 0.12$ ,  $R = 3000$ .

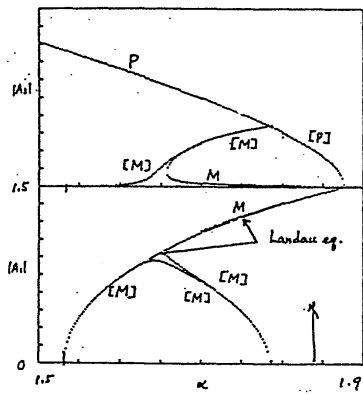


図11. 分岐曲線。  $P = 0.7$ ,  $R = 3000$ .

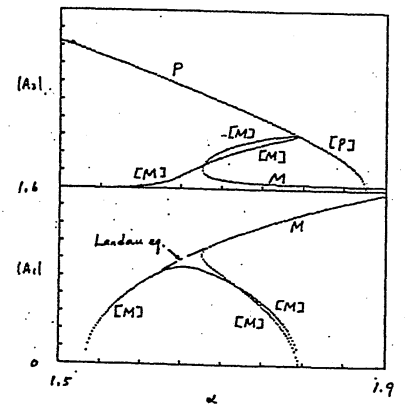


図12. 分岐曲線。  $P = 10^3$ ,  $R = 3000$ .

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} = & \lambda_1 A_1 + \lambda_{-111} |A_1|^2 A_1 + \lambda_{-221} |A_2|^2 A_1 + \lambda_{-331} |A_3|^2 A_1 \\ & + \lambda_{-322} A_2^2 A_3^* + \lambda_{-1-13} A_1^{*2} A_3, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{dA_2}{dt} = & \lambda_2 A_2 + \lambda_{-112} |A_1|^2 A_2 + \lambda_{-222} |A_2|^2 A_2 + \lambda_{-332} |A_3|^2 A_2 \\ & + \lambda_{-213} A_1 A_3 A_2^*, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{dA_3}{dt} = & \lambda_3 A_3 + \lambda_{-113} |A_1|^2 A_3 + \lambda_{-223} |A_2|^2 A_3 + \lambda_{-333} |A_3|^2 A_3 \\ & + \lambda_{-122} A_2^2 A_1^* + \lambda_{111} A_1^3, \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、 $A_2$  は第 1 高調波の複素振幅である。この方程式系においてもすべての係数  $\lambda$  は実数である。この方程式系の係数を実際に評価し、平衡解の振る舞いを詳しく調べたが、スペースの都合でここでは省略することにする。

## References

- H.Yahata (1982) Transition to turbulence in the Rayleigh-Bénard convection, *Prog. Theor. Phys.*, **68**, pp1070-1081.
- H.Yahata (1984) Onset of chaos in some hydrodynamic model systems of equation. in *Chaos and Statistical Methods*. (ed. Y.Kuramoto, Springer). pp232-241.
- J.P.Gollub and S.V.Benson (1980) Many routes to turbulent convection, *J.F.M.* **100**, pp449-470.
- A.Pellew and R.V.Southwell (1940) On maintained convective motion in a fluid heated from below, *Proc.Roy.Soc.* **A176**, pp312-343.
- H.Jeffreys (1928) Some cases of instability in fluid motion, *Proc.Roy.Soc.* **A 118**, pp195-208.
- W.H.Reid and D.L.Harris (1958) Some further results on the Bénard problem, *Phys.Fluids* **65**, pp625-645.
- L.P.Gor'kov (1957) Stationary convection in a plane liquid layer near the critical heat transfer point, *Zh. Eksp. Theor. Fiz.* **33**, pp402-407.
- W.V.R.Malkus and G.Veronis (1958) Finite amplitude cellular convection, *J.F.M.* **4**, pp225-260.
- A.Schlüter, D.Lortz and F.H.Busse (1965) On the stability of steady finite amplitude convection, *J.F.M.* **23**, pp129-144.
- F.H.Busse (1967) On the stability of two-dimensional convection in a layer heated from below, *J.Math.and Phys.* **46**, pp140-150.
- F.H.Busse and J.A.Whitehead (1971) Instabilities of convection rolls in a high Prandtl number fluid, *J.F.M.* **47**, pp305-320.
- R.M.Clever and F.H.Busse (1974) Transition to time-dependent convection, *J.F.M.* **65**, pp625-645.
- F.H.Busse and R.M.Clever (1979) Instabilities of convection rolls in a fluid of moderate Prandtl number, *J.F.M.* **91**, pp319-335.
- M.Nagata and F.H.Busse (1983) Three-dimensional tertiary motions in a plane shear flow, *J.F.M.* **135**, pp1-26.
- J.Mizushima and Y.Saito (1988) Equilibrium characteristics of the secondary convection in vertical fluid layer between two flat plates, *F.D.R.* **2**, pp183-191.
- K.Fujimura and J.Mizushima (1987) Nonlinear interaction of disturbances in free convection between vertical parallel plates, in *Nonlinear Interactions in Fluids* (ed. R.W.Miksad et al.). pp123-130.
- R.Li (1986) Analysis for Taylor vortex flow, Ph.D.thesis, Virginia Polytechnic Institute.